DIMOSTRAZIONE DELLA FORMOLA

$$\begin{vmatrix} p \\ r-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r+2 \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} p+q-1 \\ q+r-2 \end{vmatrix}$$

MEDIANTE LA GEOMETRIA A n DIMENSIONI

PER

G. VERONESE

1. Il sig. dott. S. Kantor, nella sua Nota *Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume* (1) dà le seguenti formole:

$$1 + \begin{vmatrix} m-1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m-1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m-1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n \\ 3 \end{vmatrix} + \ldots\ldots = \begin{vmatrix} m+n-1 \\ n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m-1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m-1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n \\ 3 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots = \begin{vmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{vmatrix}$$

ed aggiunge che queste somme, secondo un' osservazione che egli deve al prof. Netto, si deducono dalle serie ipergeometriche (2).

Io mi propongo nella presente Nota di dimostrare la formola che sta in testa, di cui le due formole del dott. Kan-

(1) *Litr. b. der K. Ak. der Wissensch.* II Abth. October, Wien, 1879.

(2) Osservo che m può essere minore di n. E così nella formola da dimostrarsi si ha in generale p e q minori di $q+r-2$.

tor sono un caso speciale, mediante la geometria a n dimensioni.

Ciò dimostra ancora una volta che una tale geometria non solo è interessante come studio in sè, ma anche quale metodo di ricerca e di dimostrazione. Basta quest' ultimo fatto, che, del resto, ho dimostrato ampiamente per le proprietà projettive nelle mie Memorie sopra questo argomento (1), e che dimostrerò ancora in altre da pubblicarsi, per persuadere anche coloro, cui ripugnano queste teorie, che vale la pena di occuparsene seriamente. Nella mia Memoria dei *Mathem. Annalen* ho dato, a pag. 171, il seguente teorema:

Quando in uno spazio a r *dimensioni* R_r *i* p *vertici di* q—1 *piramidi giacciono rispettivamente in* p *rette passanti per un punto, e si pone:*

$$q = n - r + 2 \qquad p = N - (n - r + 1)$$

mediante l' intersezione degli spigoli, delle facce piane, a 2, 3, ... r — 1 *dimensioni, delle* q — 1 *piramidi, si ottiene una figura di*

$$\frac{N(N-1)\ldots(N-n+r)}{(n-r+1)!}R_0\,,\quad \frac{N(N-1)\ldots(N-n+r-1)}{(n-r+2)!}R_1\,,\ldots$$
$$\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}R_{r-1}\,.$$

Ove per ciascun punto R_0 *passano* $N-(n-r+1)R_1$,

$$\frac{(N-(n-r+1))(N-(n-r+2))}{2}R_2,\ldots$$

(1) *Behandlung der project. Verhältnisse de Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. Math. Annalen*, vol. XIX. — *Geometria descrittiva a quattro dimensioni* (Atti del R. Istituto veneto, 1882). — *Interprétations géom. de la théorie des substitutions de* n *lettres* (Annali di matematica, 1883).

$$\frac{(N-(n-r+1))\dots(N-n+1)}{(r-1)!}R_{r-1}$$

» R_1, *passano* $(N-n-r+2)R_2, \dots,$

$$\frac{(N-(n-r+2))\dots(N-n+1)}{(r-2)!}R_{r-1}$$

⋮ ⋮

» R_{r-2} *passano* $N-(n-1)R_{r-1}$

Ciascuna R_1 *contiene* $(n-r+3)R_0$

» R_2 » $\frac{(n-r+3)}{2}R_0\,,\ n-r+3\ R_1$

⋮ ⋮

» R_{r-1} » $\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}R_0\,,$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}R_1\,,\dots$$

Questa figura è in un certo senso simmetrica rispetto a ciascuno dei suoi spazî delle stesse dimensioni. Per es., partendo da un punto qualunque R_0 *di essa si hanno* $q-1$ *nuove piramidi di* p *vertici, i quali sono situati rispettivamente* $q-1$ *a* $q-1$ *in* p *rette passanti per quel punto, e che conducono poi alla stessa figura.*

Questa figura può ottenersi coll' intersezione dello spazio R_r, dove essa giace, con la figura completa di N punti dello spazio a n dimensioni R_n, e viceversa da una tale configurazione generale di N punti in R_n si ottiene, mediante una sezione con uno spazio R_r qualunque di R_n, una figura analoga alla data. Ciascuna di queste figure in R_r può anche risguardarsi come la projezione di una configurazione di punti di uno spazio superiore, come ho dimostrato nella citata Memoria.

Gli N punti arbitrarî dello spazio R_n, essendo $N \geqq n+1$, determinano evidentemente

$$\frac{N(N-1)\dots(N-n+r)}{(n-r+1)!} \quad \text{spazî } R_{n-r} ,$$
$$\frac{N(N-1)\dots(N-n+r-1)}{(n-r+2)!} \quad \text{»} \quad R_{n-r+1}$$

e così via, e finalmente $\frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} R_{n-1}$, i quali tagliati con lo spazio qualunque R_r di R_n determinano i punti, le rette e gli spazî R_r della figura primitiva del teorema.

Basta a tal uopo rammentarsi ([1]) che uno spazio R_m viene determinato da $m+1$ punti indipendenti, e che due spazî qualunque R_m, $R_{m'}$ s' incontrano in uno spazio R_a, ove

$$a = m + m' - n .$$

I punti, le rette ecc. e gli spazî R'_{r-1} della figura possono essere contrassegnati cogli indici di quelli tra gli N punti che determinano gli spazî R_{n-r}, R_{n-r+1}, ... R_{n-1} della configurazione di quei punti in R_n. Così per es. i punti vengono indicati con simboli che contengono soltanto $n-r+1$ indici della serie 1, 2, ..., N, perchè uno spazio R_{n-r} di R_n viene determinato precisamente da $n-r+1$ punti indipendenti.

Se noi poniamo nel teorema precedente

$$n = q + r - 2 \quad , \quad N = p + q - 1$$

la figura del teorema si compone di

$$\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+q-1)}{(q-1)!} \qquad R_0$$
$$\frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+q-1)}{q!} \qquad R_1$$

(1) Loc. cit., p. 163.

$$\frac{(p+q-1)\,(p+q-2)\ldots(p-r+2)}{(p+r-2)\,!}R_{r-1}$$

2. Consideriamo ora le $q-1$ piramidi i cui vertici sono situati in p rette che mettono in un punto della figura.

Dal teorema dato risulta che due piramidi di r o meno di r vertici, nello spazio R_r, aventi questi vertici due a due allineati con un punto fisso, sono sempre omologhe.

I lati omologhi dei triangoli prospettivi di due delle $q-1$ piramidi s' incontrano in tre punti R_0 di una retta R_1. I punti R_0 che si ottengono, considerando le $q-1$ piramidi due a due, sono $\left|\begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} p-1 \\ 2 \end{matrix}\right|$, e giacciono tre a tre in $\left|\begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} p \\ 3 \end{matrix}\right|$ rette R_1.

I lati corrispondenti di due quadrangoli [1] omologhi delle $q-1$ piramidi s' incontrano in 6 punti di un piano R_2, situati 3 a 3 in quattro rette; dunque le rette R_1 trovate giacciono 4 a 4 in $\left|\begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} p \\ 4 \end{matrix}\right|$ piani R_2.

I lati corrispondenti di due pentagoni omologhi si incontrano invece in 10 punti di uno spazio R_3, vale a dire i piani R_2 giacciono 5 a 5 in $\left|\begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} p \\ 5 \end{matrix}\right|$ spazî R_3 e così via. Finalmente considerando due piramidi fondamentali di R_r (le quali hanno soltanto $r+1$ vertici), i loro lati omologhi s' incontrano in uno spazio R_{r-1}, quindi le $q-1$ piramidi danno in tal guisa $\left|\begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} p \\ r+1 \end{matrix}\right|$ spazî R_{r-1}.

Siano ora dati tre triangoli due a due omologhi di 3

(1) Non intendo con questa parola di dire che i quattro vertici sono in un piano.

delle $q-1$ piramidi. I tre àssi di omologia passano per un punto R_0', il quale appartiene pure ai punti della figura completa. Onde le $\left|\begin{matrix}q-1\\2\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\3\end{matrix}\right|$ rette R_1 passano 3 a 3 per $\left|\begin{matrix}q-1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\3\end{matrix}\right|$ punti R_0'. Per tre quadrangoli omologhi otteniamo in vece 4 punti R_0' situati sopra una retta R_1'; vale a dire i punti R_0' giacciono 4 a 4 in $\left|\begin{matrix}q-1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\4\end{matrix}\right|$ rette R_1'. Per tre pentagoni corrispondenti si ottengono 5 rette R_1' che giacciono 5 a 5 in $\left|\begin{matrix}q-1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\5\end{matrix}\right|$ piani R_2' e così via. Finalmente per tre piramidi omologhe di $r+2$ vertici si hanno $r+2$ spazî R'_{r-2}, situati in uno spazio R'_{r-1}, in modo che gli $\left|\begin{matrix}q-1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\r+1\end{matrix}\right|$ spazî R'_{r-2} così ottenuti giacciono $r+2$ a $r+2$ in $\left|\begin{matrix}q-1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\r+2\end{matrix}\right|$ spazî R'_{r-1}. Considerando ora nello stesso modo quattro triangoli, quadrangoli ecc. due a due omologhi di quattro delle $q-1$ piramidi e così via, si ottengono tutti i punti, le rette e gli spazî della figura completa delle $q-1$ piramidi (1).

Ora se confrontiamo il numero degli spazî R_{r-1} della figura, che così si ottiene, con quello trovato al n.° 1, si ha evidentemente

$$\left|\begin{matrix}p\\r-1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}q-1\\1\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\r\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}q-1\\2\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\r+1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}q-1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}p\\r+2\end{matrix}\right| + \ldots =$$
$$= \frac{(p+q-1)(p+q-2)\ldots\ldots(p-r+2)}{(q+r-2)!} = \left|\begin{matrix}p+q-1\\q+r-2\end{matrix}\right| .$$

(1) Questo metodo per determinare i punti, le rette, ecc. della figura è stato adoperato dal sig. Kantor nella sua nota citata per le figure del piano e dello spazio R_3.

Ma si ha pure

$$\frac{(m+1)(m+2)\,....\,(m+n)}{n\,!} = \frac{(n+1)(n+2)\,....\,(m+n)}{m\,!}$$

e se si pone

$$p-r+1=m\ ,\ q+r-2=n$$

si ha

$$\left|\begin{matrix} p+q-1 \\ q+r-2 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} p+q-1 \\ p-r+1 \end{matrix}\right|.$$

c. c. v. d.

Volendo il numero dei punti, delle rette, dei piani ecc. della figura basta porre $r=1, 2, 3$ ecc.

Padova, 20 nov. 1883.